عند اختيار ر من الاشياء من بين ن من الاشياء فإننا نراعى الحالات الاتية:

١ - إذا كان الاختيار مع الإحلال والترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن^{ر}$

٢ - إذا كان الاختيار مع الإحلال وبدون ترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن + ر - ١ \text{ و } ر$

٣ - إذا كان الاختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن ل_{ر}$

٤ - إذا كان الاختيار بدون إحلال دون مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن \text{ و } ر$

ثانيًا: التباديل:

سبق أن درست مفهوم التباديل وعلمت أن التباديل هى كل ترتيب يمكن الحصول عليه من عدة اشياء بأخذها كلها أو بعضها. كما درست العلاقات الآتية:

١) $ن ل_{ن} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \times ..... \times (ن - ر + ١)$

لكل $ن \geq ر$، $ن \in صـ^{+}$، $ر \in ط$

٢) $ن ل_{ن} = |ن = ن(ن - ١)(ن - ٢) \times ..... \times ٢ \times ٢ \times ١$

٣) $ن ل_{ر} = \frac{|ن}{|(ن - ر)}$ لكل $ن \geq ر$، $ن \in ط$، $ر \in ط$

٤) $|ن = ن |ن - ١ = ن(ن - ١)|ن - ٢ = ...$

هل تعلم؟

$ن ل_{ر} \in صـ^{+}$

$|ن \in صـ^{+}$

$|٠ = |١ = ١$

$ن ل_{٠} = ١$

$ن ل_{١} = ن$

ثالثًا: التوافيق:

سبق أن درست مفهوم التوافيق وعلمت أن التوافيق هى كل مجموعة يمكن الحصول عليها من عدة اشياء بأخذها كلها أو بعضها. كما درست العلاقات الآتية:

١) $ن \text{ و } ر = \frac{ن ل_{ر}}{|ر}$ لكل $ن \geq ر$، $ن \in صـ^{+}$، $ر \in ط$

٢) $ن \text{ و } ر = \frac{|ن}{|ر \, |(ن - ر)}$ لكل $ن \geq ر$، $ن \in ط$، $ر \in ط$

٣) $ن \text{ و } ر = ن \text{ و } ن - ر$

(٤) إذا كان $ن \text{ و } س = ن \text{ و } ص$ فإن س = ص أو س + ص = ن

لاحظ أن

$ن \text{ و } ر = ن \text{ و } ٠ = ١$

$ن \text{ و } ر \leq ن ل_{ر}$

$ن \text{ و } ر \in صـ^{+}$

قانون النسبة *Ratio rule*

$$\frac{ن \text{ و } ر}{ن \text{ و } ر - ١} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

لاحظ أن

(١) $\frac{ن ل_{١٤}}{ن ل_{١٣}} = \frac{ن ل_{٢٧}}{ن ل_{٢٧}} = \frac{٢٧ - ١٣}{١٤} = ١٠$

(٢) $\frac{ن ل_{٢٥}}{ن ل_{٢٤}} \times \frac{ن ل_{٢٦}}{ن ل_{٢٥}} = \frac{ن ل_{٢٦}}{ن ل_{٢٤}}$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة كالآتى:

الطرف الأيمن: $\frac{ن \text{ و } ر}{ن \text{ و } ر - ١} = \frac{\frac{|ن}{|ر \, |(ن - ر)}}{\frac{|ن}{|(ر - ١) \, |(ن - ر + ١)}}$

$= \frac{|ن}{|ر \, |(ن - ر)} \times \frac{|(ر - ١) \, |(ن - ر + ١)}{|ن}$

$= \frac{١}{ر |(ر - ١) \, |(ن - ر)} \times \frac{|(ر - ١)(ن - ر + ١)|(ن - ر)}{١} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$

قانون الجمع

$$(٢)\quad \text{ن}_{\text{ر}} + \text{ن}_{\text{ر}-١} = \text{ن}+١_{\text{ر}}$$

ويمكن إثبات ذلك على النحو الآتي:

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}} + \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر}-١ \lfloor \text{ن}-\text{ر}+١} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}} \times \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} + \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر}-١ \lfloor \text{ن}-\text{ر}+١} \times \frac{\text{ر}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}+١} \left(\frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} + \frac{\text{ر}}{١} \right) = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}+١} \times \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}} = \frac{\lfloor \text{ن}+١}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}+١-\text{ر}} = \text{ن}+١_{\text{ر}} = \text{الطرف الأيسر}$$

تمارين (١-١)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معًا أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة {أ، ب، جـ، د، هـ، و} هي:

(أ) $^{٦}\text{ل}_{٢} \times {}^{٦}\text{ل}_{٣}$ (ب) $^{٦}\text{ل}_{٢} \times {}^{٦}\text{ل}_{٦}$ (جـ) $^{٦}\text{ل}_{٢} + {}^{٦}\text{ل}_{٣}$ (د) $^{٦}\text{ل}_{٢} + {}^{٦}\text{ل}_{٦}$

(٢) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} : {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٣ : ١$ فإن ن تساوي:

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣) اشترك ١٢ لاعبًا في مسابقة للسباحة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث؟

(أ) ١٣٢٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٢١٠ (د) ٢٢١٠

(٤) أي القيم الآتية يمكن أن تساوي $^{٢٥}\text{ل}_{٣}$؟

(أ) $(٤ \times ٦)^{٢٥}$ (ب) $(٥ \times ٥)^{٢٥}$ (جـ) $(٩ \times ٣)^{٢٧}$ (د) $(٥ \times ٦)^{٣٠}$

(٥) إذا كان $^{١٧}\text{ل}_{\text{م}} = {}^{٢٩}\text{ل}_{١}$، فإن م تساوي:

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ١٢

(٦) إذا كان $^{\text{ن}+٣}\text{ل}_{٣} = ٨$ فإنها تساوي:

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

(٧) قيمة $^{٢٦}\text{و}_{٢} + \frac{٣}{\text{ر}=١} {}^{٢٦}\text{و}_{\text{ر}}$ تساوي:

(أ) $^{٢٦}\text{و}_{٣}$ (ب) $^{٢٦}\text{و}_{٢٦}$ (جـ) $^{٢٥}\text{و}_{٢٦}$ (د) $^{٢٥}\text{و}_{٢٥}$

٢

(٨) يجب على طالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالًا بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى. كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (ج) ٢٨٠ (د) ٣٤٦

(٩) إذا كان $ق_{ن+٢} = ن^{٢} \times ق_{ن}$ فإن ن تساوي:

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٠

(٨) من عالم: عدد الطرق = عدد طرق اختيار ٤ أسئلة من الخمس الأولى × عدد طرق اختيار الأسئلة الباقية

$= ق_{٥}^{٤} \times ق_{٨}^{٦} = ١٤٠$ (باستخدام الآلة الحاسبة)

عدد طرق اختيار ٥ أسئلة من الخمس الأولى × عدد طرق اختيار الباقي

$= ق_{٥}^{٥} \times ق_{٨}^{٥} = ٥٦$ (باستخدام الآلة الحاسبة)

$\therefore$ عدد الطرق $= ق_{٥}^{٤} \times ق_{٦}^{٢} + ق_{٥}^{٥} \times ق_{٨}^{٥} = ١٤٠ + ٥٦ = ١٩٦$

(٩) $ق_{ن+٢}^{٤} = ن^{٢} \times ق_{ن}^{٤}$

$\Leftarrow \frac{\lfloor ن+٢}{\lfloor ن-٢} = ن^{٢} \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤}$

$\Leftarrow \frac{\lfloor ن+٢}{\lfloor ن-٢} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤} \times ن^{٢}$

$\Leftarrow \frac{\lfloor ن+٢}{\lfloor ن-٢} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤} \times ن^{٢}$

$\Leftarrow \frac{(ن+٢)(ن+١)ن(ن-١)(ن-٢)\lfloor ن-٤}{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤} = ن^{٢}(ن-١)(ن+١)$

$\Leftarrow \frac{(ن+٢)(ن+١)ن}{٤} = ١$

$\Leftarrow (ن+٢)(ن+١)ن = \lfloor ٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\Leftarrow ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٢ن - ٢٤ = ٠$

$\Leftarrow (ن-٤)(ن+٦) = ٠$ (باستخدام الآلة الحاسبة)

$\therefore ن = ٤$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي وعددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

العدد الفردي ٥ = م العدد الزوجي ٤ = ن

عدد سيتم اختياره ٣ = ر عدد زوجي واحد ١ = ر

$ق^{٤}_{١} \times ق^{٥}_{٢} = ٤ \times ١٠ = ٤٠$ طريقة

(١١) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أو عددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

$ق^{٤}_{١} + ق^{٥}_{٢} = ٤ + ١٠ = ١٤$ طريقة.

(١٢) كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوي على ٤ طلاب.

الطالب يأخذ سيتم اختياره من ٨ ، الطالب الثاني سيختار اختياره من ٦ والثالث يختار من ٤ وهكذا

∴ عدد الطرق $= ق^{٨}_{٢} \times ق^{٦}_{٢} \times ق^{٤}_{٢} \times ق^{٢}_{٢} = ٢٨ \times ١٥ \times ٦ \times ١ = ٢٥٢٠$

(١٣) كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

(أ) مع الإحلال (ب) بدون إحلال

(أ) مع الإحلال وترتيب $= ٧^{٤} = ٢٤٠١$

(ب) بدون الإحلال وترتيب $= ل^{٧}_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

(١٤) إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ويفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س.

(أ) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط. (ب) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل

(ج) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر.

أ- عدد الطرق المكونة لعدد أرقامه $= ل^{٣}_{٤}$ حيث ن = ٤ ، ر = ٣

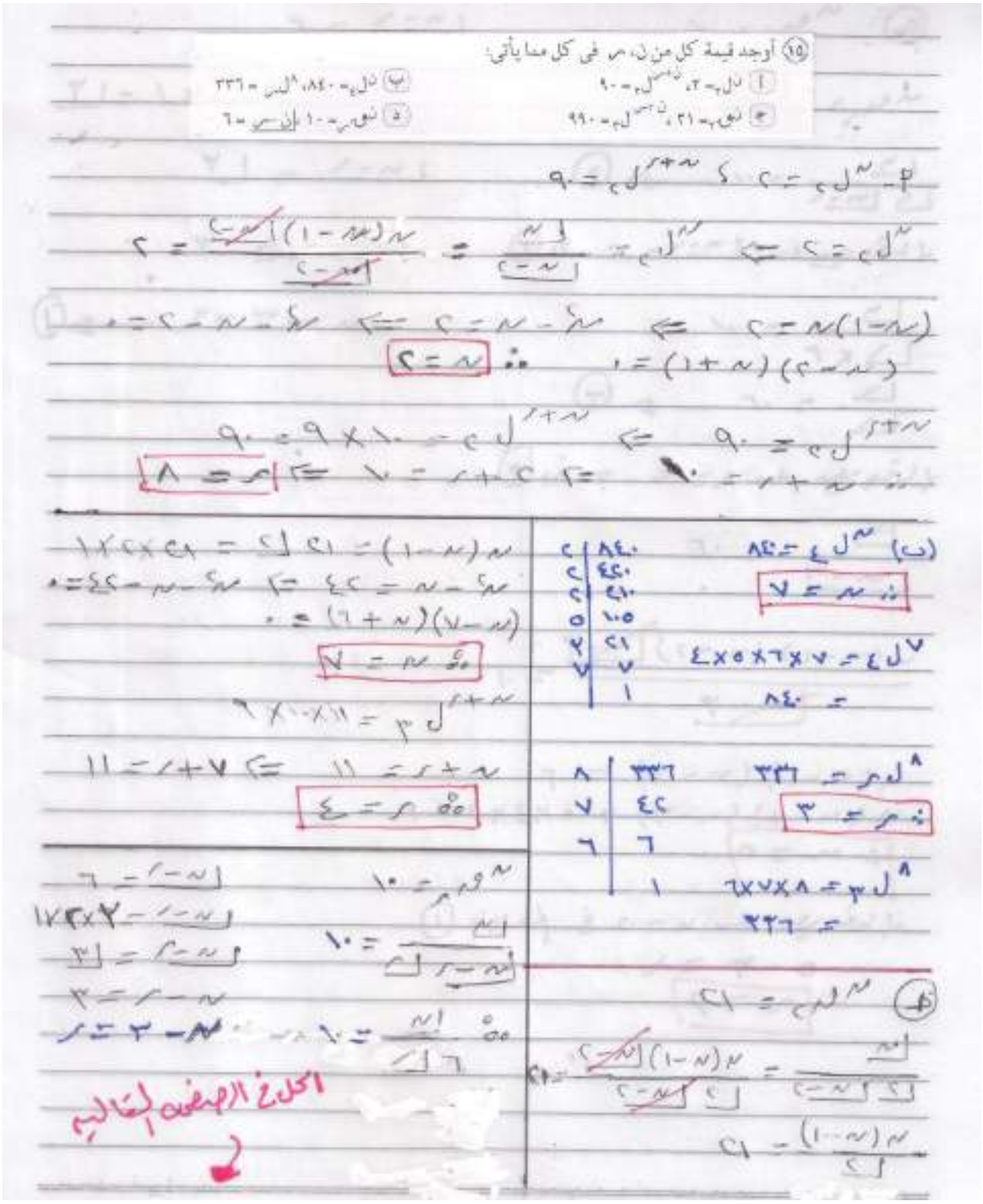
$= ل^{٤}_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

ب- عدد الطرق المكونة لعدد أرقامه ٣ أرقام على الأقل $= ل^{٤}_{٣} + ل^{٤}_{٤} = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨$

ج- عدد الطرق المكونة لعدد أرقامه على الأكثر $= ل^{٤}_{١} + ل^{٤}_{٢} + ل^{٤}_{٣}$

$= ٤ + ١٢ + ٢٤ = ٤٠$

∴ أ = ٢٤ طريقة ب = ٤٨ طريقة ج = ٤٠ طريقة



⑤ $^{ن}م_{ر} = ١٠$ ، $\lfloor ن = ٦$

$^{ن}م_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-ر)}$ ، $\lfloor ن = ٣ \times ٢ \times ١ = ٣!$

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-ر)} = ١٠$ ② ، $\lfloor (ن-ر) = ٣!$

بالتعويض في ② عن $\lfloor ن = ٦$ ∴ $ن - ر = ٣$

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر} = ١٠$ ، $ن = ٣ + ر$ ①

$\frac{\lfloor ن}{٦ \times \lfloor ر} = ١٠$

$\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر} = ٦٠$ ③

بالتعويض عن $ن = ٣ + ر$ في ③

$\frac{\lfloor (٣+ر)}{\lfloor ر} = ٦٠$

$\frac{(٣+ر)(٢+ر)(١+ر)\lfloor ر}{\lfloor ر} = ٦٠$

$(ر+١)(ر+٢)(ر+٣) = ٦٠$

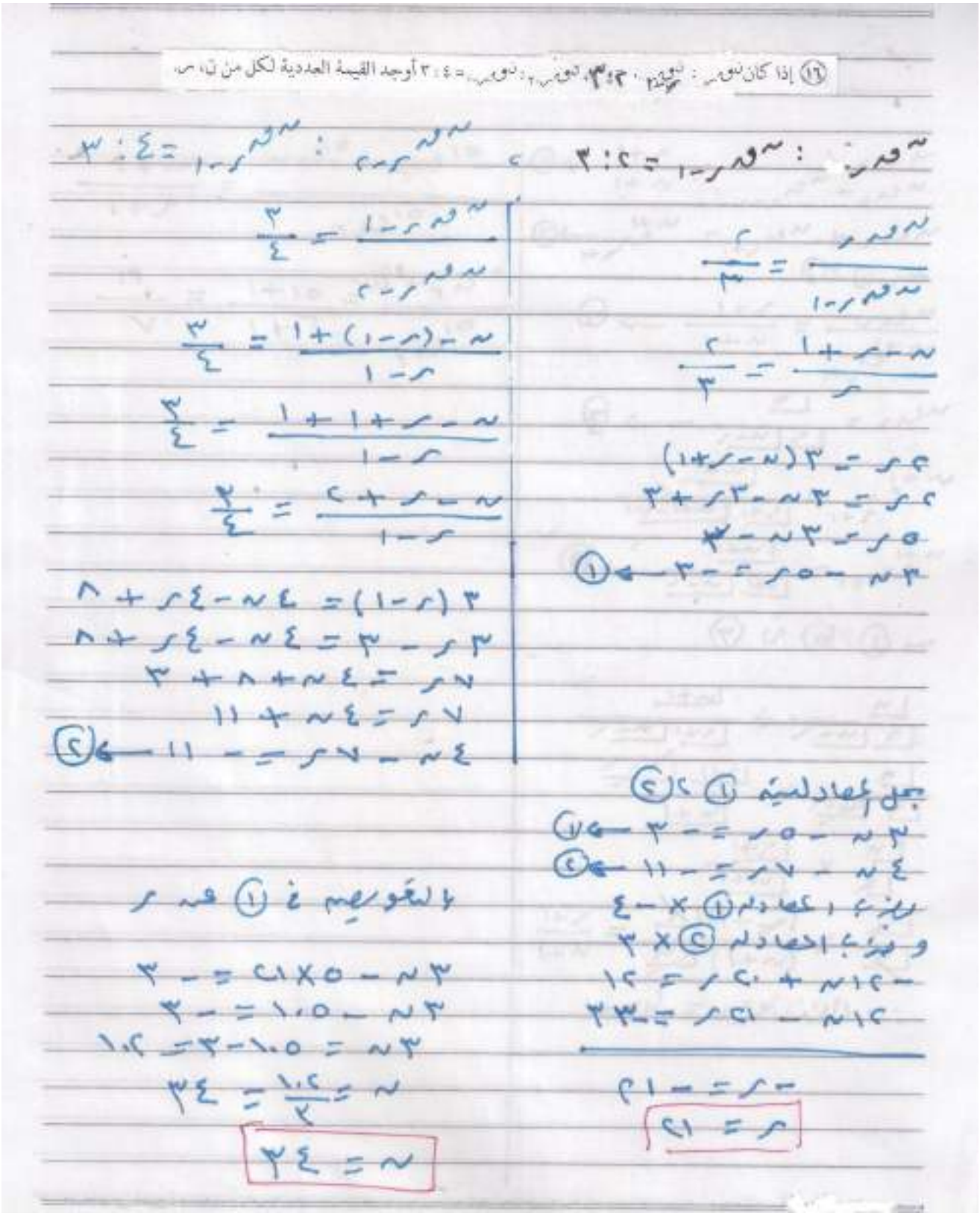
$(ر+١)(ر+٢)(ر+٣) = ٢ \times ٤ \times ٥$

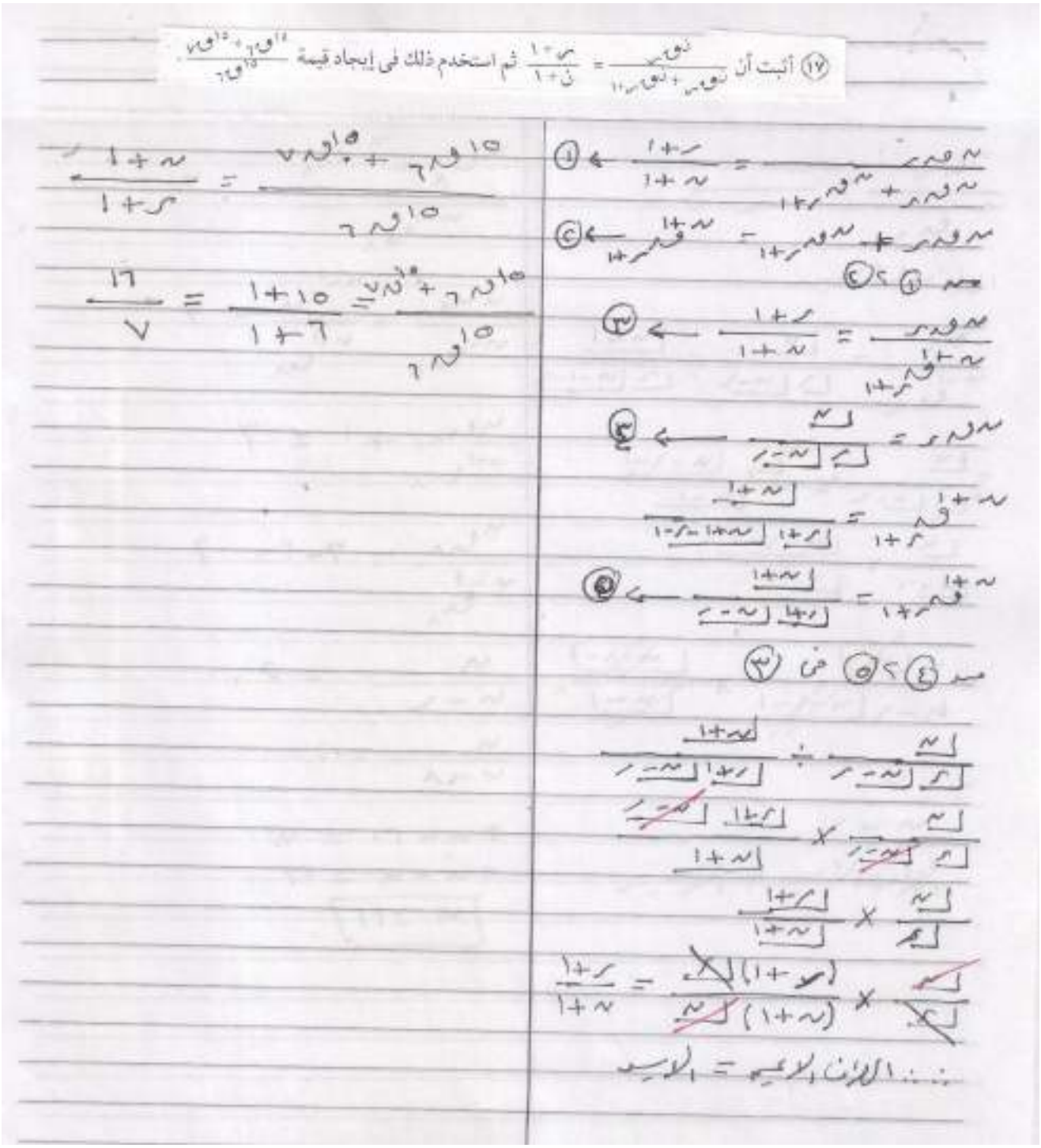
∴ $ر = ٢$

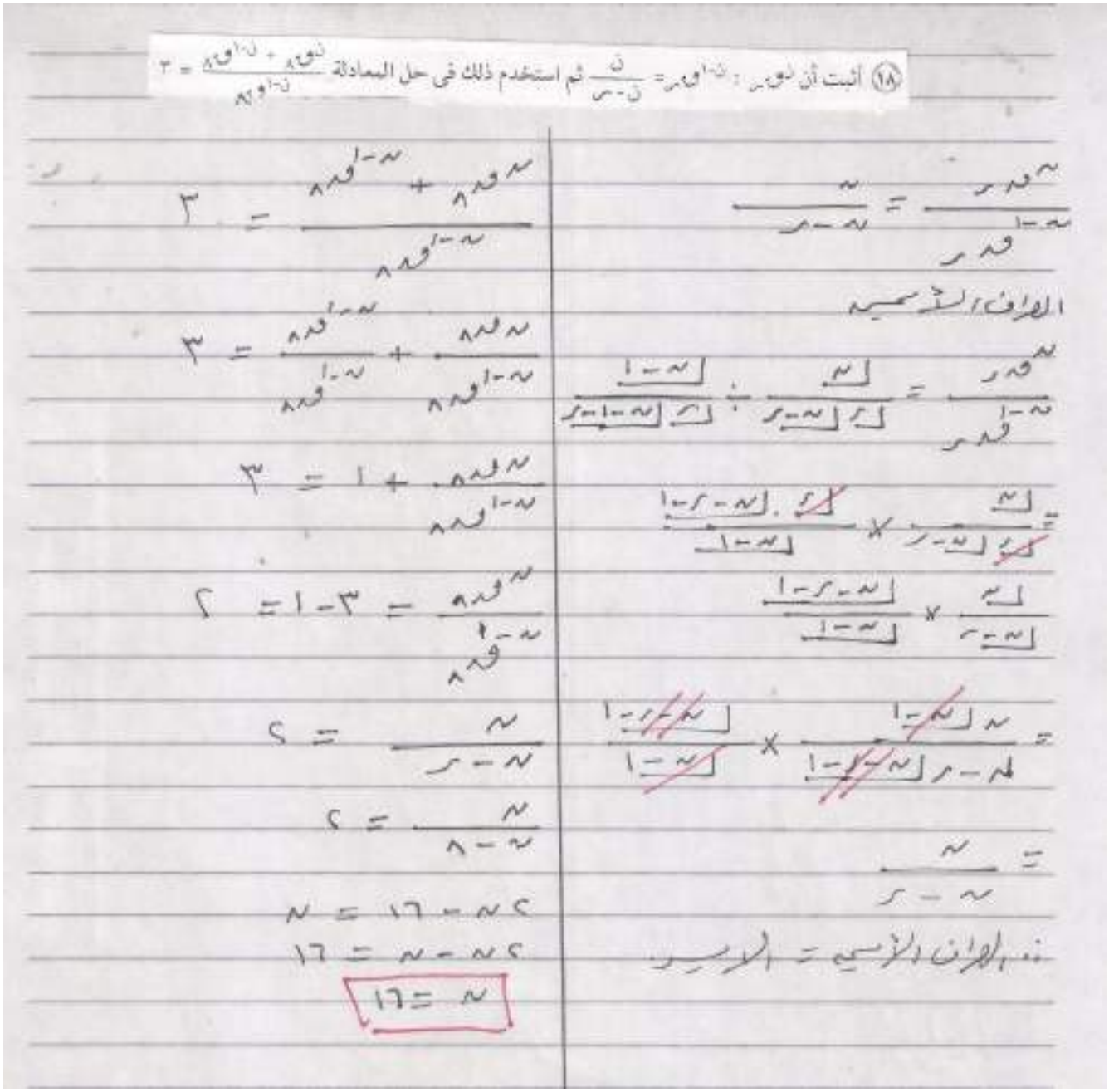
بالتعويض عن $ر = ٢$ في المعادلة ①

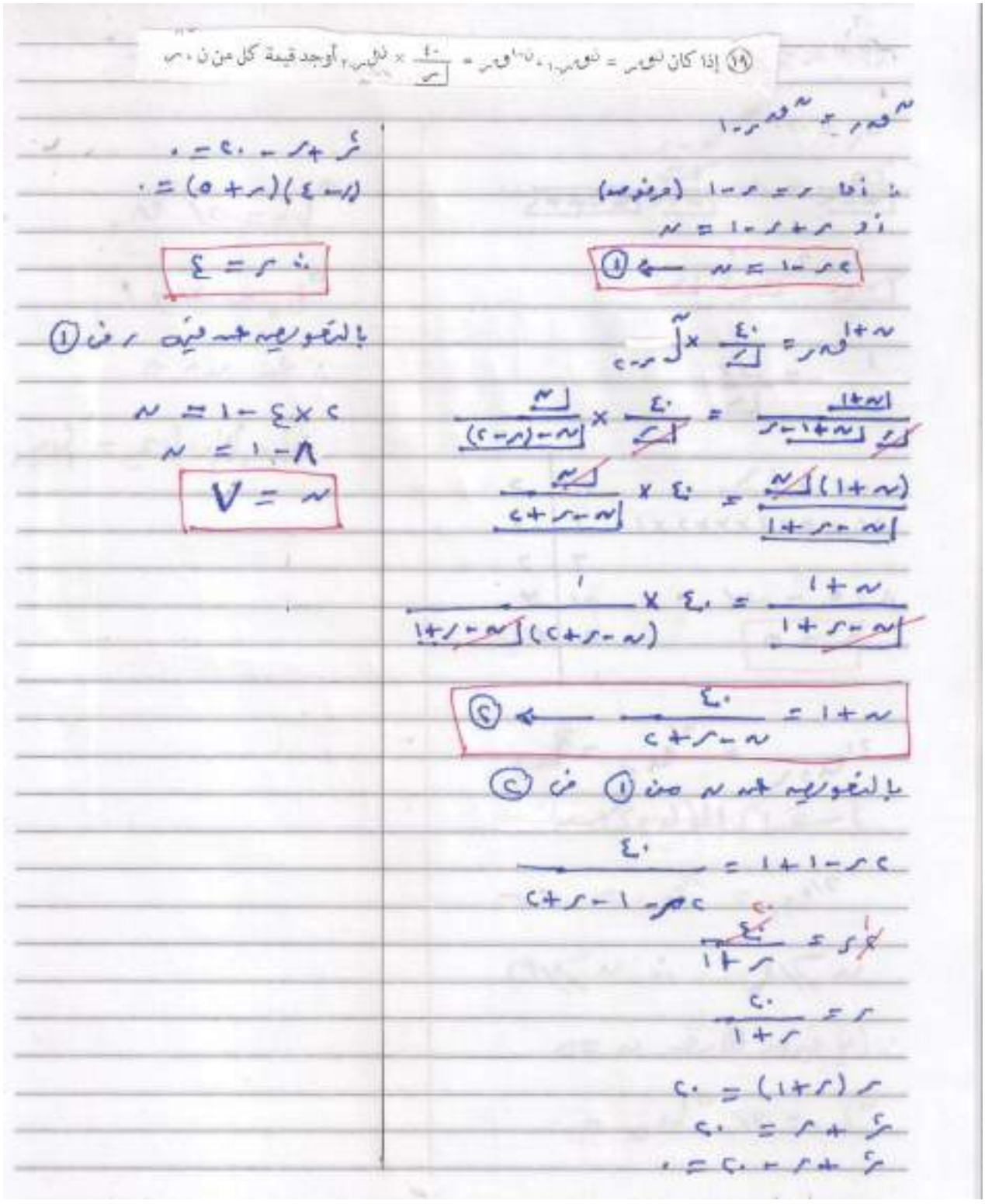
$ن = ٣ + ٢$

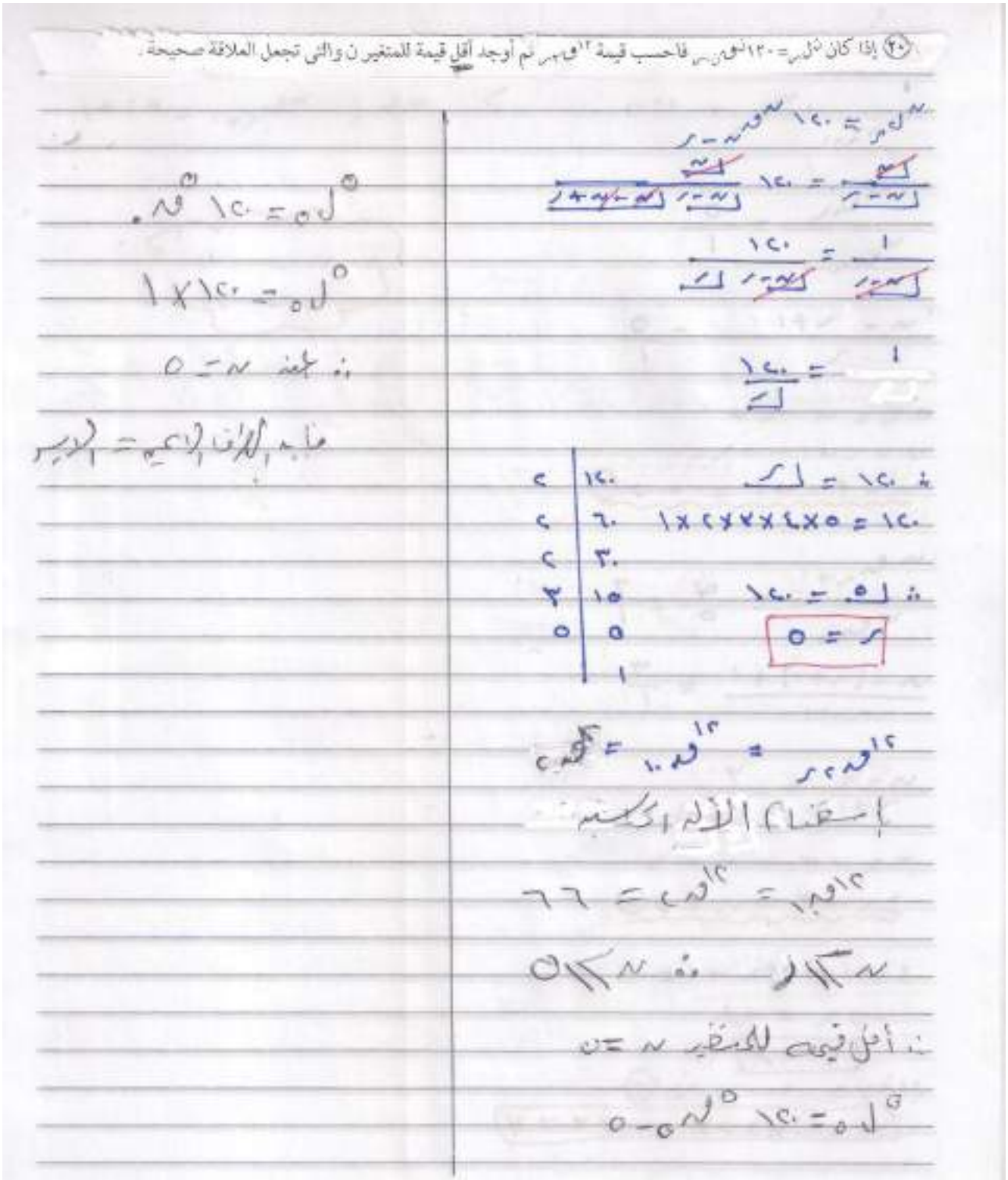
$ن = ٥$

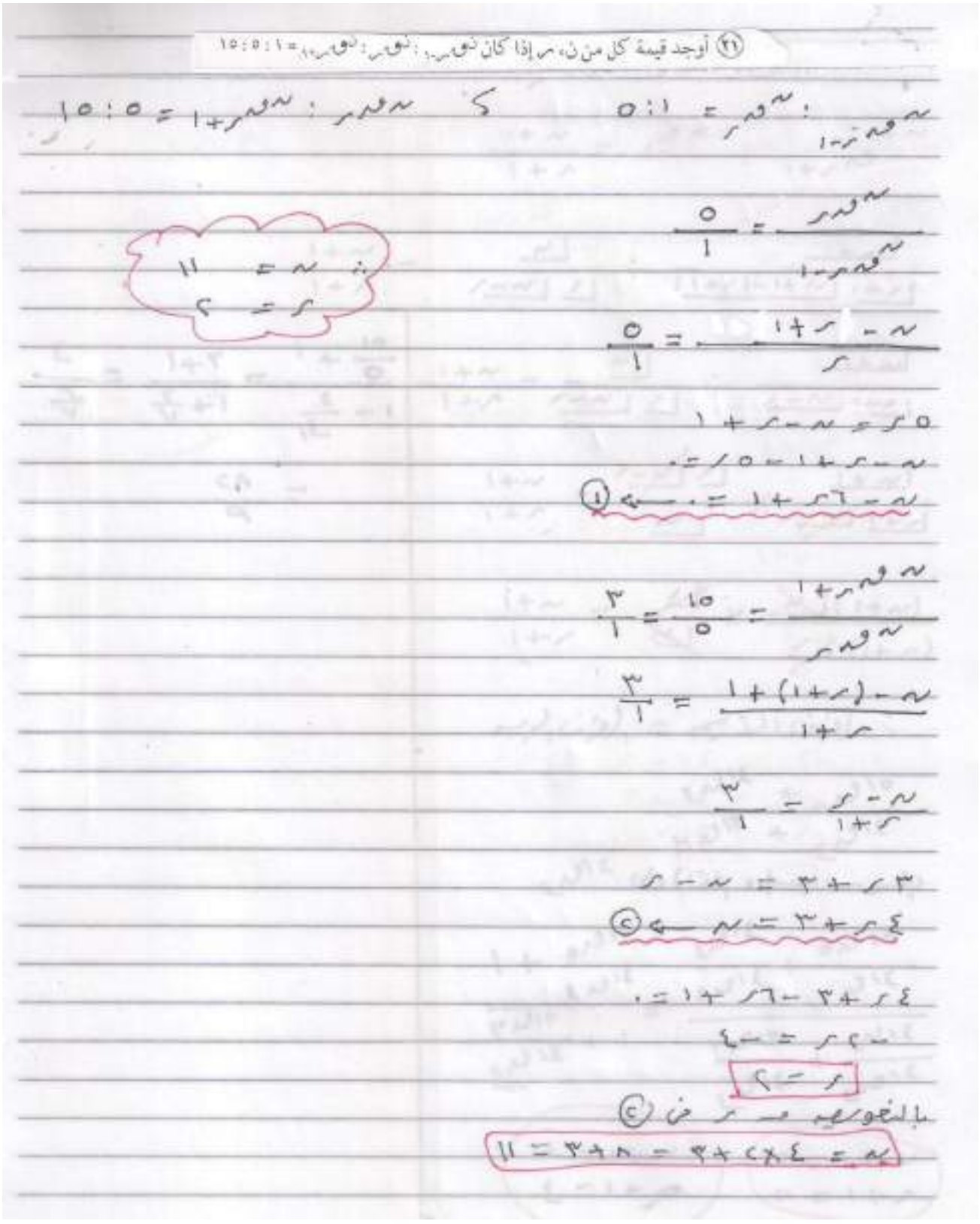

١٦ إذا كان ن(م ر) : ن(م ر+١) = ٣ : ٤ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر
ن(م ر) : ن(م ر+١) = ٣ : ٤
ن(م ر) / ن(م ر+١) = ٣/٤
ن(م ر) / ن(م ر-١) = ٣/٤
(ن+ر-١)! / ر! = ٣/٤
(ن+ر-١)! / (ر-١)! = ٣/٤
٤ (ن+ر) = ٣ ر
٤ ن + ٤ ر = ٣ ر
٣ ر - ٤ ن = ٤
ن = ٣ ر - ٤ ← (١)
٤ (ن+ر-١)! = ٣ (ن+ر-٢)!
٤ (ن+ر-١)! = ٣ (ن+ر-٢)!
٤ ن + ٤ ر - ٤ = ٣ ن + ٣ ر - ٦
ن + ٤ ر - ٣ ر = ٤ - ٦
ن + ر = -٢
ن = -٢ - ر ← (٢)
بالتعويض في (١) في (٢)
-٢ - ر = ٣ ر - ٤
-٢ + ٤ = ٣ ر + ر
٢ = ٤ ر
ر = ٢/٤
ر = ١/٢
ن = -٢ - ١/٢
ن = -٥/٢

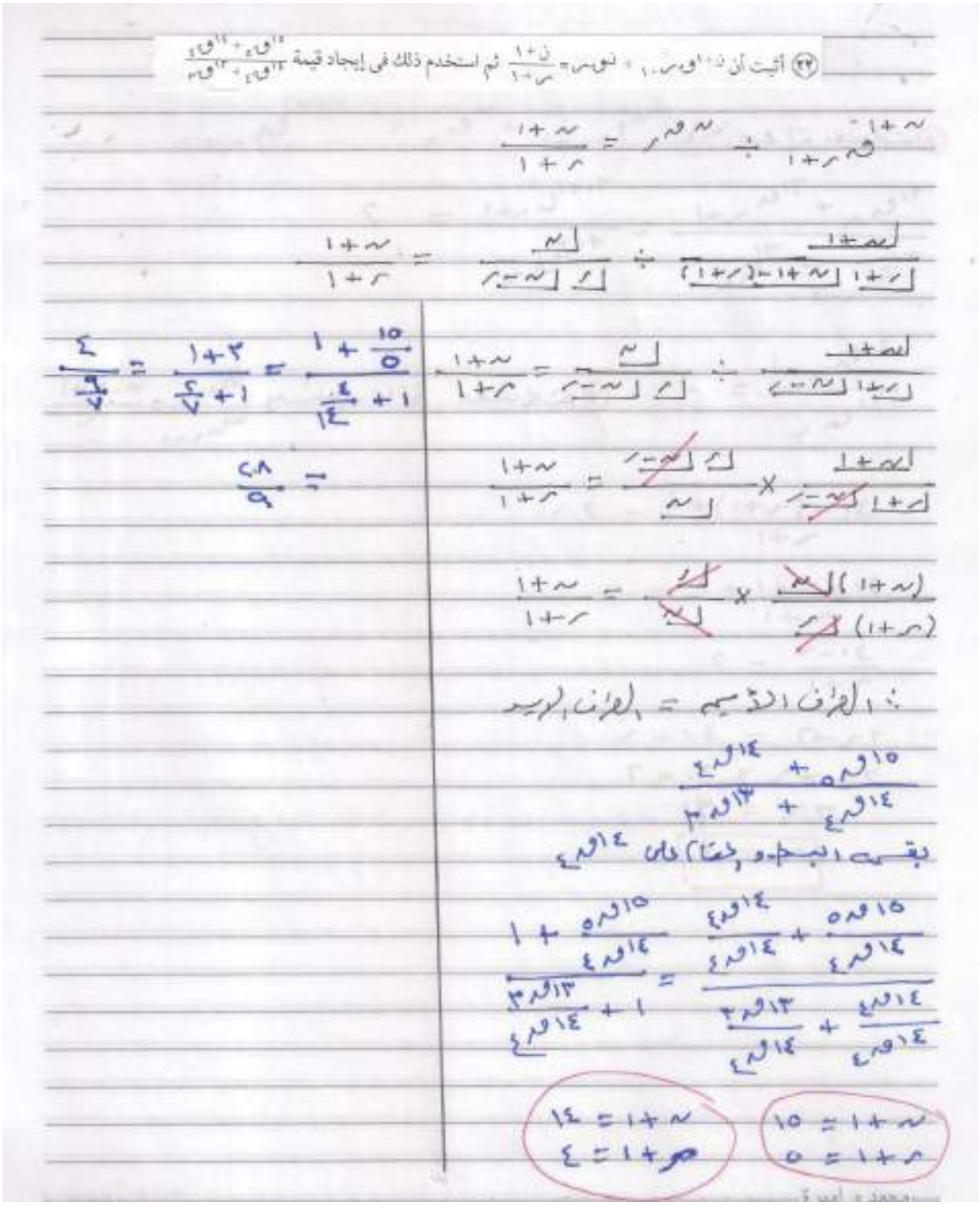



(١٨) اثبت أن ن ق ر = ن - ١ ق ر = ن / ن - ر ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة ن ق ٨ + ن - ١ ق ٨ / ن - ١ ق ٨ = ٣
الطرف الأيسر
= ن / ن - ر
الطرف الأيمن = الأيسر






(٢١) أوجد قيمة كل من ن، ر إذا كان ق ن ر : ق ن ر-١ : ق ن ر+١ = ١ : ٥ : ١٠
ن ق ر : ن ق ر-١ = ١ : ٥
ن ق ر / ن ق ر-١ = ٥ / ١
(ن - ر + ١) / ر = ٥ / ١
ن - ر + ١ = ٥ ر
ن - ٦ ر + ١ = ٠ ← (١)
ن ق ر+١ / ن ق ر = ١٥ / ٥ = ٣ / ١
(ن - ر) / (ر + ١) = ٣ / ١
ن - ر = ٣ ر + ٣
ن = ٤ ر + ٣ ← (٢)
٤ ر + ٣ - ٦ ر + ١ = ٠
-٢ ر = -٤
ر = ٢
بالتعويض في (٢)
ن = ٤ × ٢ + ٣ = ٨ + ٣ = ١١
ن = ١١
ر = ٢



(٢٢) إذا كان $\frac{ق_{ر}^{١٣} + ق_{ر+١}^{١٣}}{ق_{ر}^{١٣} + ق_{ر-١}^{١٣}} = ٢$ فأوجد قيمة ر

* بتطبيقه قاعدة الجمع $ق_{ر}^{ن} + ق_{ر+١}^{ن} = ق_{ر+١}^{ن+١}$

$$\frac{ق_{ر}^{١٣} + ق_{ر+١}^{١٣}}{ق_{ر-١}^{١٣} + ق_{ر}^{١٣}} = \frac{ق_{ر+١}^{١٣+١}}{ق_{ر}^{١٣+١}} = ٢$$

* بتطبيقه قانونه لبسط $\frac{ق_{ر}^{ن}}{ق_{ر-١}^{ن}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

$$٢ = \frac{ق_{ر+١}^{١٤}}{ق_{ر}^{١٤}}$$

$$٢ = \frac{١+(ر+١)-١٤}{ر+١}$$

$$٢ = \frac{١+١-ر-١٤}{ر+١}$$

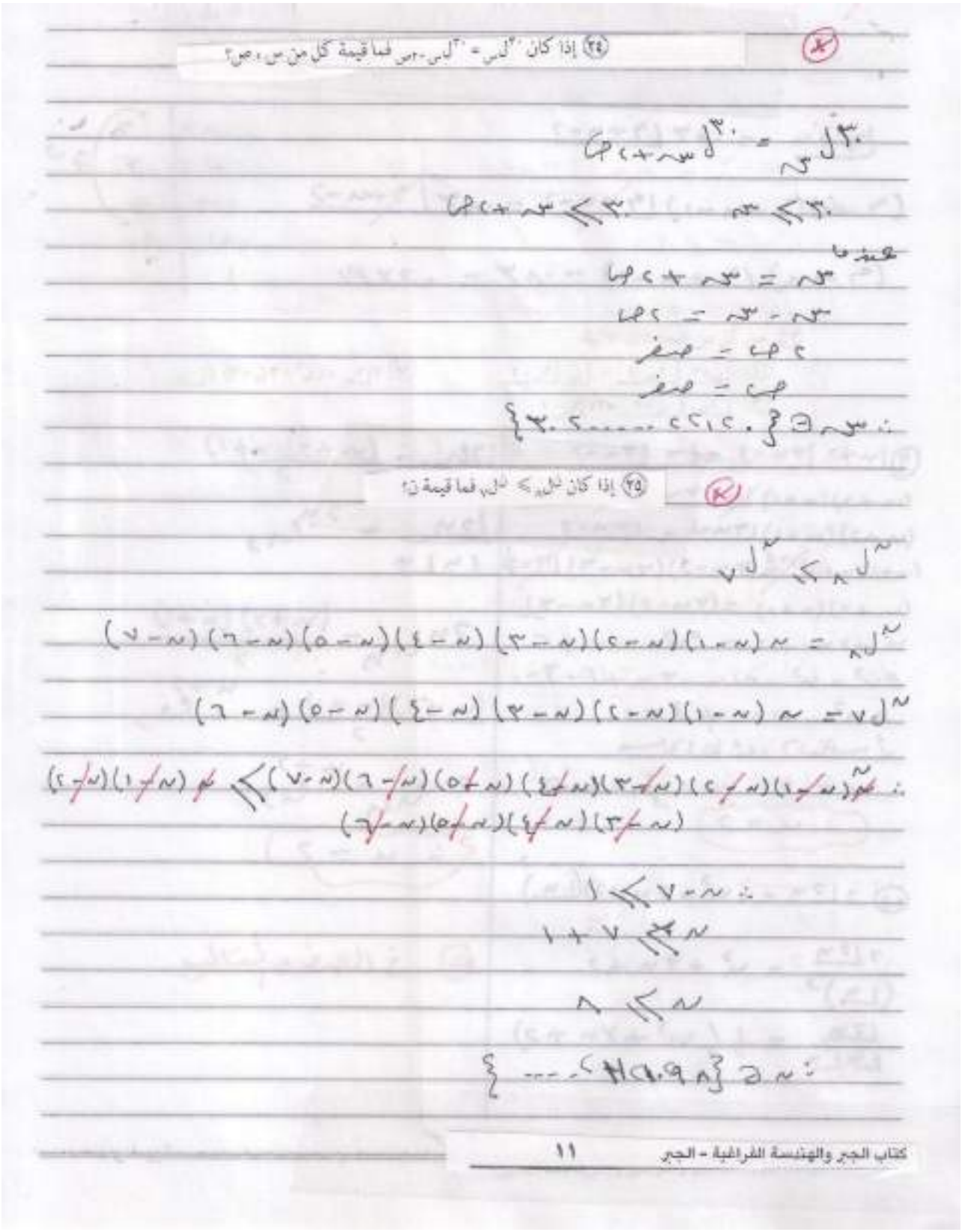
$$٢ = \frac{-ر-١٤}{ر+١}$$

$$٢ر+٢ = -ر-١٤$$

$$٢ر+ر = -١٤-٢$$

$$٣ر = -١٦$$

$$ر = -٤$$



(٢٤) إذا كان $^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س-ص}$ فما قيمة كل من س ، ص؟

$^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+ص}$

$س = س + ص$ أو $س = ٣٠ - (س + ص)$

$ص = صفر$ أو $٢س + ص = ٣٠$

$\therefore س \in \{٠، ١٥، ١٤، ١٣، ..... ، ٠\}$

(٢٥) إذا كان $^{ن}ل_{٨} > {}^{ن}ل_{٧}$ فما قيمة ن؟

$^{ن}ل_{٨} > {}^{ن}ل_{٧}$

$^{ن}ل_{٨} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)$

$^{ن}ل_{٧} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)$

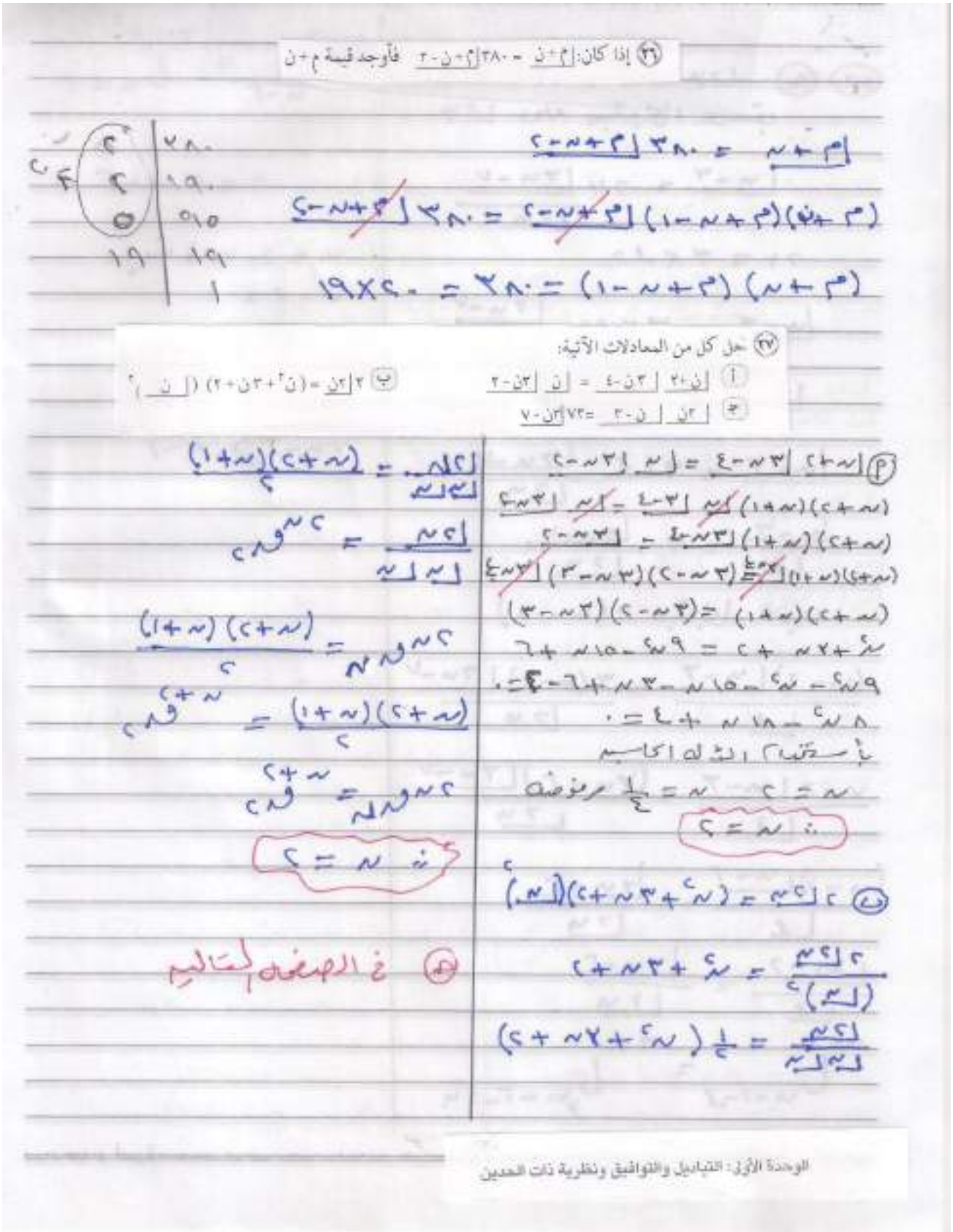
$\therefore ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧) > ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)$

$\therefore ن - ٧ > ١$

$ن > ٨$

$\therefore ن \in \{٩، ١٠، ١١، ..... \}$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ١١



(٣٦) إذا كان: $|م+ن = ٣٨٠|م+ن-٢$ فأوجد قيمة م+ن

٢٨٠	
١٩٠	
٩٥	
١٩	
١	

$|م+ن = ٣٨٠|م+ن-٢$

$(م+ن)(م+ن-١)|م+ن-٢ = ٣٨٠|م+ن-٢$

$(م+ن)(م+ن-١) = ٣٨٠ = ٢٠ \times ١٩$

(٣٧) حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $|ن+٢ \; |٣ن-٤ = |ن \; |٣ن-٢$

(ب) $٢|٢ن = (ن^٢+٣ن+٢)(|ن)^٢$

(جـ) $|٢ن \; |ن-٢ = ٧٢|٢ن-٧$

(أ) $|٣ن+٢ \; |٣ن-٤ = |ن \; |٣ن-٢$

$(٣ن+٢)(٣ن+١)|٣ن-٤ = |ن \; |٣ن-٢$

$(٣ن+٢)(٣ن+١)|٣ن-٤ = (٣ن-٢)(٣ن-٣)|٣ن-٤$

$(٣ن+٢)(٣ن+١) = (٣ن-٢)(٣ن-٣)$

$٩ن^٢+٩ن+٢ = ٩ن^٢-١٥ن+٦$

$٩ن^٢-٩ن^٢-١٥ن-٣ن+٦-٢ = ٠$

$٨ن^٢-١٨ن+٤ = ٠$

بالقسمة على ٢ لأن الحاسبة

$ن = \frac{١}{٤}$ مرفوضة $\quad ن = ٤$

$\therefore ن = ٤$

(ب) $٢|٢ن = (ن^٢+٣ن+٢)(|ن)^٢$

$\frac{٢|٢ن}{(|ن)^٢} = ن^٢+٣ن+٢$

$\frac{|٢ن}{|ن \; |ن} = \frac{١}{٢}(ن^٢+٢ن+٤)$

$\frac{|٢ن}{|ن \; |ن} = \frac{|ن.}{٢ \; |ن} = \frac{(ن+١)(ن+٢)}{٢}$

$\frac{|٢ن}{|ن \; |ن} = {}^{ن}ق_{ن}$

$\frac{(ن+١)(ن+٢)}{٢} = {}^{ن}ق_{٢}$

$\frac{(ن+١)(ن+٢)}{٢} = {}^{ن+٢}ق_{٢}$

$ن = ٢$ ∴

(جـ) $|ن \; |ن-٢ = ٧٢|٢ن-٧$

(٣٨) في الصفحة التالية

(٢٧) (هـ) |٢ن |ن-٣ = ٧٢ |٣ن-٧

بقسمة الطرفين على |٢ن

$$\text{|ن-٣} = ٧٢ \frac{\text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

٧٢ = ٣ × ٢٤

$$\text{|ن-٣} = ٣ \times ٢٤ \frac{\text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

|٤ = ٢٤

$$\text{|ن-٣} = ٣\ \text{|٤}\ \frac{\text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

$$\frac{\text{|ن-٣}}{\text{|٤}} = ٣\ \frac{\text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

بضرب الطرفين × (ن - ٢)

$$\frac{(\text{ن-٢})\ \text{|ن-٣}}{\text{|٤}} = \frac{٣(\text{ن-٢})\ \text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

$$\frac{\text{|ن-٢}}{\text{|٤}} = \frac{(\text{٣ن-٦})\ \text{|٣ن-٧}}{\text{|٢ن}}$$

$$\frac{(\text{ن-٢})\ \text{|ن-٣}}{\text{|٤}} = \frac{\text{|٣ن-٦}}{\text{|٢ن}}$$

$$\frac{\text{|ن-٢}}{\text{|٤}} = \frac{\text{|٣ن-٦}}{\text{|٢ن}}$$

$$^{\text{ن-٢}}\text{ل}_{\text{ن-٢-٤}} = {}^{\text{٣ن-٦}}\text{ل}_{\text{٣ن-٦-٢ن}}$$

$$^{\text{ن-٢}}\text{ل}_{\text{ن-٦}} = {}^{\text{٣ن-٦}}\text{ل}_{\text{ن-٦}}$$

∴ ن-٢ = ٣ن-٦

ن = ٢ مرفوض

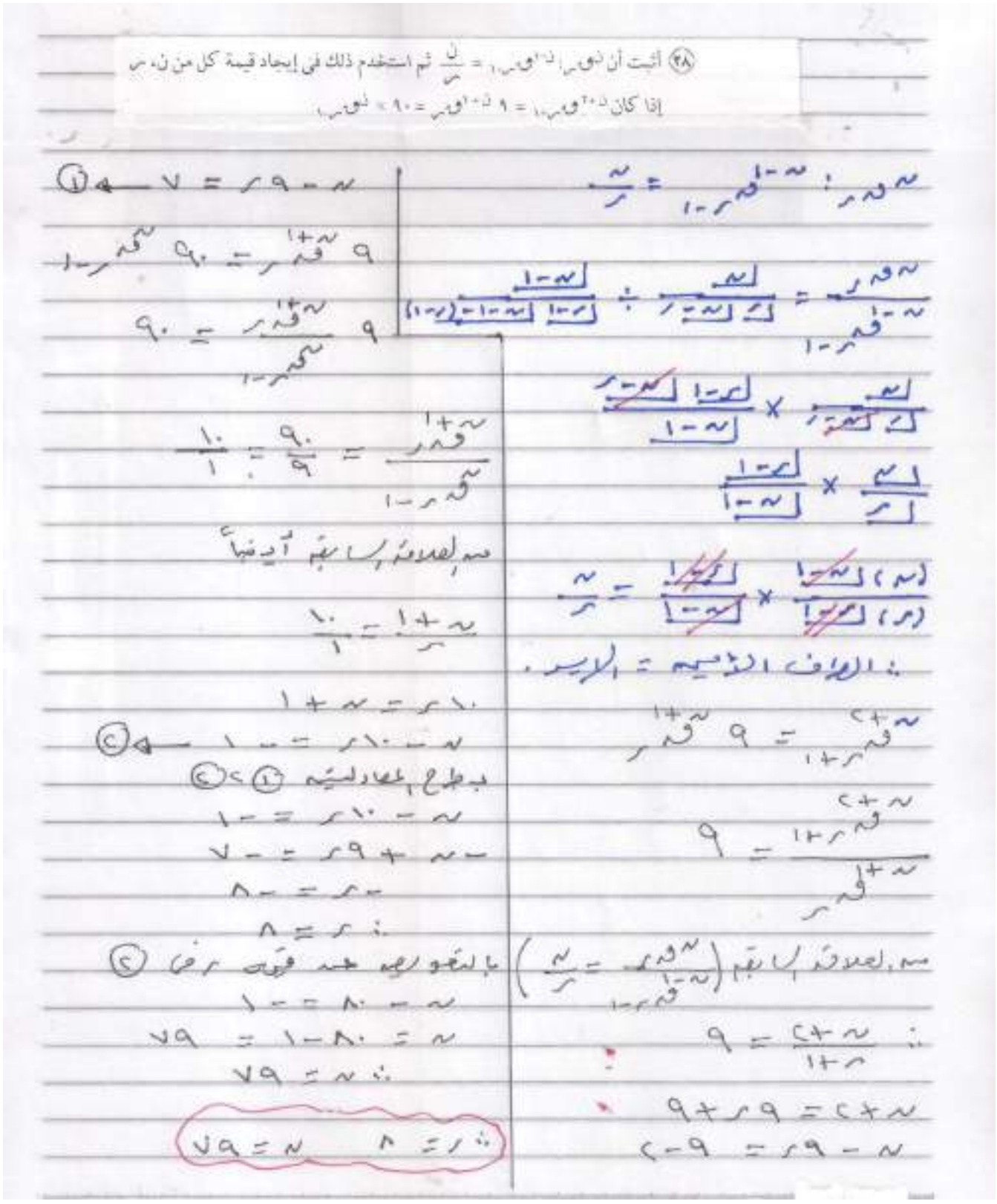
ن-٦ = ٠

ن = ٦

لأن

ن-٢ ≮ ن-٦

٣ن-٦ ≮ ن-٦



(٢٨) أثبت أن ن ق ر = ن ق ن-١ ر-١ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة كل من ن ، ر

إذا كان ٩ ن ق ر+١ = ٩٠ ن ق ر-١

$$\frac{ن!}{(ن-ر)!} = ن ق ر$$

$$\frac{ن ق ر}{ن-١ ق ر-١} = \frac{\frac{ن!}{(ن-ر)!}}{\frac{(ن-١)!}{(ن-١-ر+١)!}} \div \frac{\frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}}{\frac{(ن-١)!}{(ر-١)!(ن-١-ر+١)!}}$$

$$\frac{ن!}{ر!(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!(ن-ر)!}{(ن-١)!}$$

$$\frac{ن!}{ر(ر-١)!(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!(ن-ر)!}{(ن-١)!}$$

$$\frac{ن(ن-١)!}{ر(ر-١)!(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!(ن-ر)!}{(ن-١)!} = \frac{ن}{ر}$$

∴ الطرف الأيمن = الأيسر .

$$٩ ق ر+١ ن+٢ = ق ر ن+١$$

$$\frac{ق ر+١ ن+٢}{ق ر ن+١} = ٩$$

من العلاقة السابقة $\left(\frac{ق ر ن}{ق ر-١ ن-١} = \frac{ن}{ر}\right)$

$$\therefore \frac{ن+٢}{ر+١} = ٩$$

$$ن+٢ = ٩ر+٩$$

$$ن-٩ر = ٩-٢$$

① ← $ن-٩ر = ٧$

$$٩ ق ر+١ ن+١ = ق ر-١ ن$$

$$\frac{ق ر+١ ن+١}{ق ر-١ ن} = ٩٠$$

$$\frac{ن+١ ق ر}{ن ق ر-١} = ٩٠$$

$$\frac{ن+١}{ر} = \frac{٩٠}{٩} = \frac{١٠}{١}$$

من العلاقة السابقة أيضاً

$$\frac{ن+١}{ر} = \frac{١٠}{١}$$

$$ن+١ = ١٠ر$$

$$ن-١٠ر = -١$$ ← ②

بطرح المعادلتين ① ، ②

$$-٩ر = -٨$$

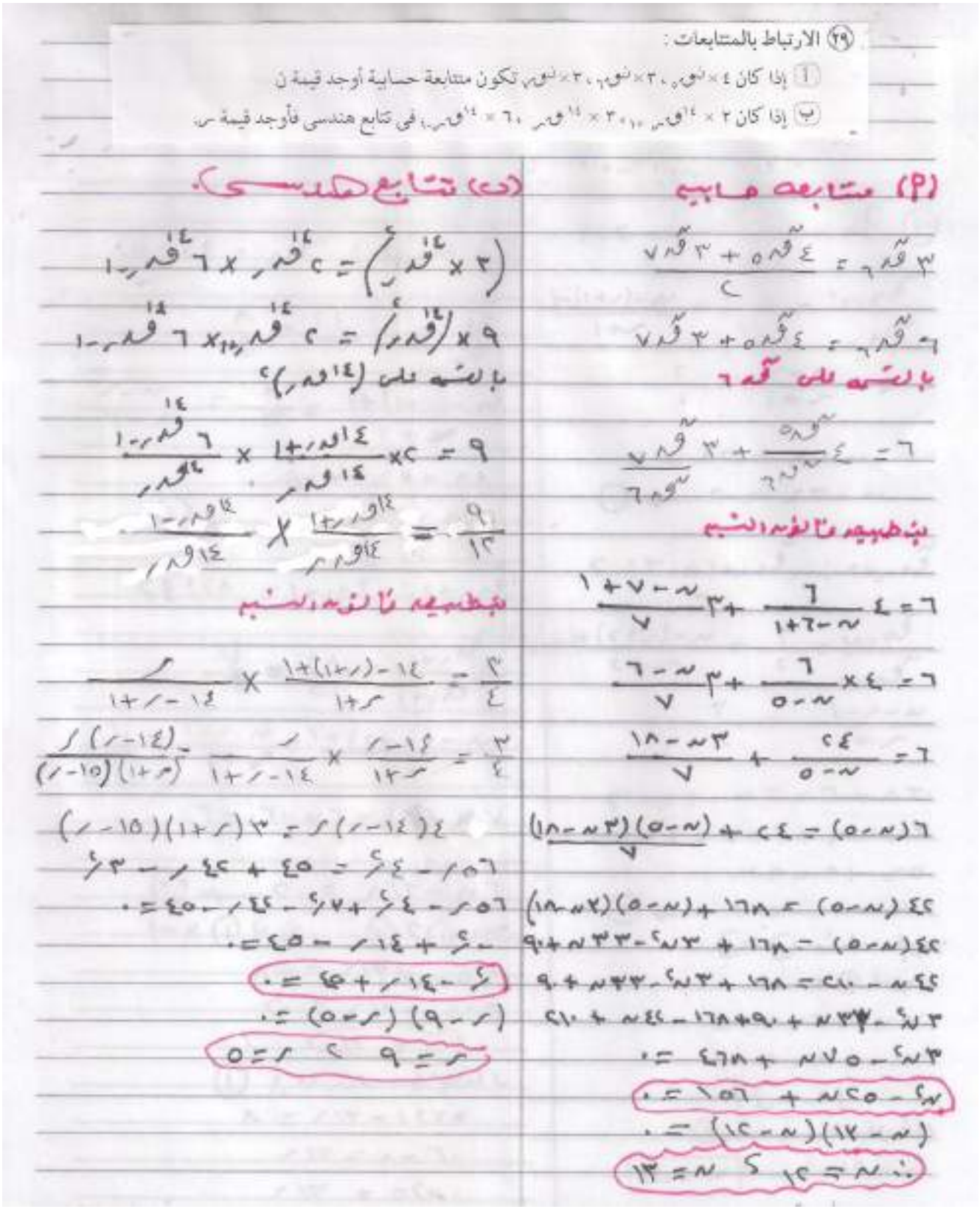
$$ر = ٨$$

بالتعويض عن قيمة ر في ①

$$ن-٧٢ = ٧$$

$$ن = ٧٩$$

$$\therefore ن = ٧٩ \quad ر = ٨$$



(٢٩) الارتباط بالمتتابعات :

(أ) إذا كان ٤ × ن$_{ر}$ × ٣ × ن$_{ر+١}$ × ٣ × ن$_{ر+٢}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

(ب) إذا كان ٢ × ق$_{ر}^{١٤}$ × ق$_{ر+١}^{١١}$ × ٣ × ق$_{ر+٢}^{١١}$ ، ٦ × ق$_{ر+٣}^{١٤}$ في تتابع هندسي فأوجد قيمة ر.

(أ) متتابعة حسابية

$$\frac{٣ق_{ن-٢} + ٥ق_{ن}^{٤} + ٣ق_{ن+٢}}{٢} = ٣ق_{ن-١}$$

$$٣ق_{ن-٢} + ٥ق_{ن}^{٤} + ٣ق_{ن+٢} = ٦ق_{ن-١}$$

بالقسمة على ق$_{ن}$

$$٦ = ٤ق_{ن}^{٣} + ٣ق_{ن+٢} + \frac{٥ق_{ن}^{٤}}{ق_{ن-٢}^{٣}}$$

بتطبيق قانون النسب

$$٦ = ٤ + \frac{٦}{١٠-٢ن} + ٣ + \frac{٧-٢ن}{٧}$$

$$٦ = ٤ \times \frac{٦}{٥-ن} + ٣ + \frac{٦-ن}{٧}$$

$$٦ = \frac{٤٢}{٥-ن} + \frac{١٨-ن٣}{٧}$$

$$٦(ن-٥) = ٤٢ + \frac{(ن-٥)(١٨-ن٣)}{٧}$$

$$٤٢(ن-٥) = ١٦٨ + (ن-٥)(١٨-ن٣)$$

$$٤٢(ن-٥) = ١٦٨ + ٣٣ن - ٣ن^{٢} - ٩٠$$

$$٤٢ن - ٢١٠ = ١٦٨ + ٣٣ن - ٣ن^{٢} - ٩٠$$

$$٣ن^{٢} - ٩ن + ٤٢ن - ٢١٠ - ١٦٨ + ٩٠ = ٠$$

$$٣ن^{٢} - ٧٥ن + ٤٦٨ = ٠$$

$$ن^{٢} - ٢٥ن + ١٥٦ = ٠$$

$$(ن-١٢)(ن-١٣) = ٠$$

$$\therefore ن = ١٣ \text{ ، } ن = ١٢$$

(ب) تتابع هندسي

$$ق_{ر}^{١٤} \times (٣ق_{ر}^{٤}) = ٦ق_{ر+١}^{١٤} \times ٦ق_{ر-١}^{١٤}$$

$$٩ \times (ق_{ر}^{١٤})^{٢} = ٣٦ق_{ر+١}^{١٤} \times ق_{ر-١}^{١٤}$$

بالقسمة على (ق$_{ر}^{١٤}$)^{٢}

$$٩ = ٣٦ \times \frac{ق_{ر+١}^{١٤}}{ق_{ر}^{١٤}} \times \frac{ق_{ر-١}^{١٤}}{ق_{ر}^{١٤}}$$

$$\frac{٩}{١٣} = \frac{ق_{ر+١}^{١٤}}{ق_{ر}^{١٤}} \times \frac{ق_{ر-١}^{١٤}}{ق_{ر}^{١٤}}$$

بتطبيق قانون النسب

$$\frac{٣}{٤} = \frac{١٤-(ر+١)}{ر} \times \frac{ر}{١٤-ر+١}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{١٣-ر}{ر} \times \frac{ر}{١٥-ر} \times \frac{ر(ر-١٤)}{(ر+١)(ر-١٥)}$$

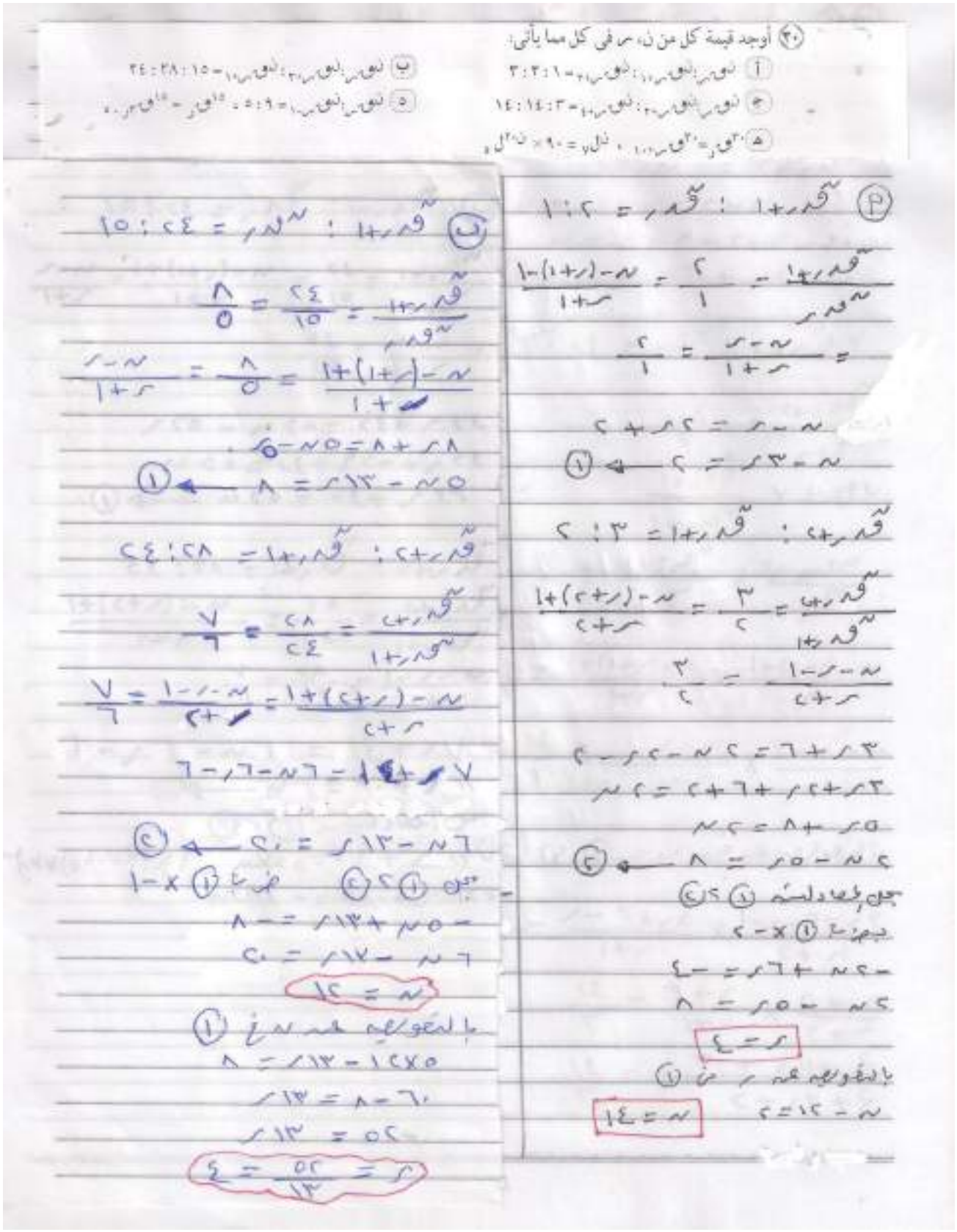
$$٣(ر+١)(ر-١٥) = ٤ر(ر-١٤)$$

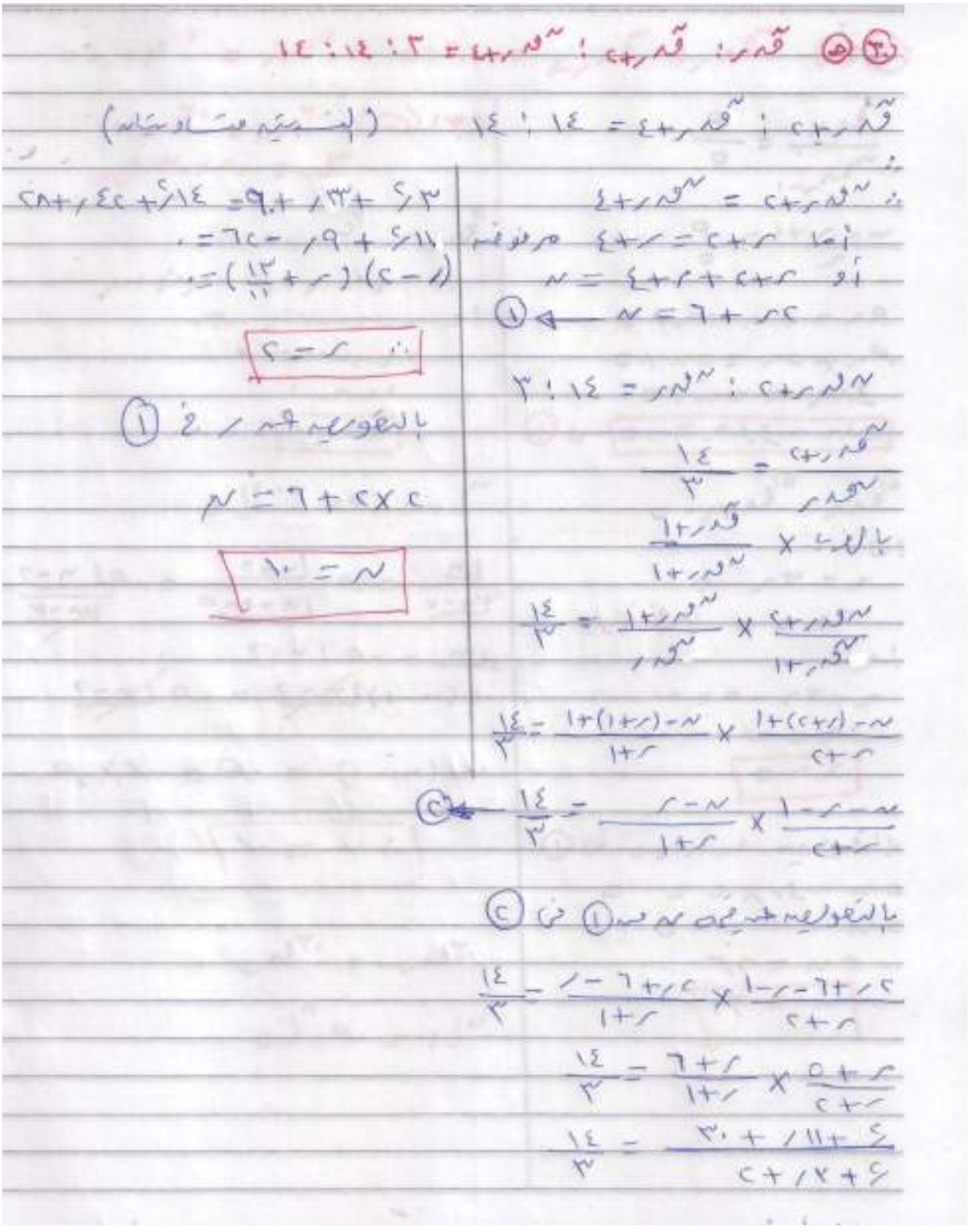
$$٣ر^{٢} - ٤٥ر - ٣ر + ٤٥ = ٤ر^{٢} - ٥٦ر$$

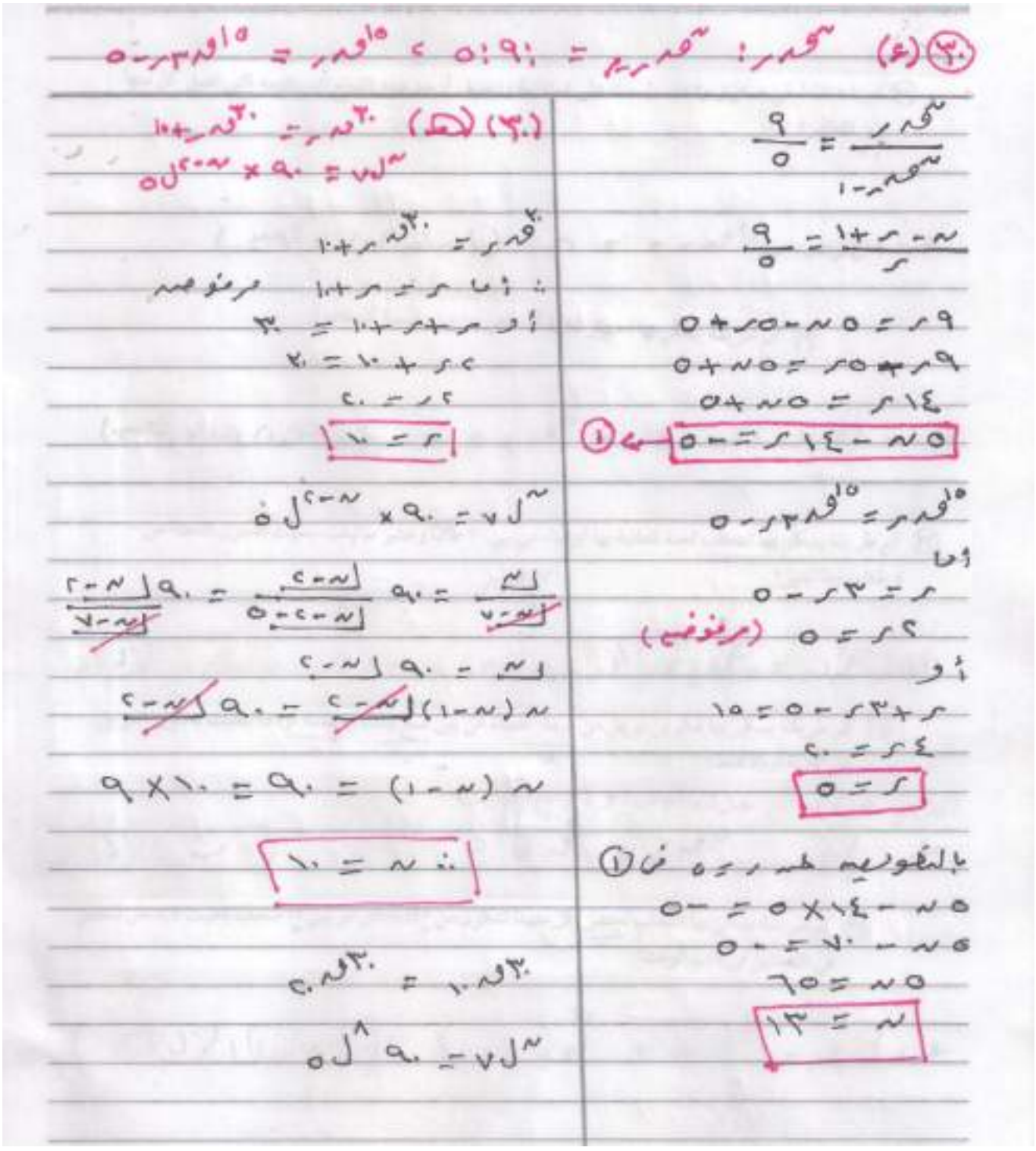
$$ر^{٢} - ٥٤ر + ٤٥ = ٠$$

$$(ر-٩)(ر-٥) = ٠$$

$$ر = ٩ \text{ ، } ر = ٥$$


(٣٠) أوجد قيمة كل من ن، ر في كل مما يأتي:
أ) ن ق ر : ن ق ر-١ = ٣ : ٢
ب) ن ق ر : ن ق ر-١ = ١٥ : ٢٨ : ٢٤
ج) ن ق ر : ن ق ر+١ = ٣ : ١٤ : ١٤
د) ن ق ر = ٣٠ ق ر ، ن ل ر = ٩٠ × ٣٠ ل ر
هـ) ن ق ر : ن ق ر-١ = ٩ : ٥ ، ٣٠ ق ر = ١٥ ق ر





(٣٠) (ع) $ق_{ر} : ق_{ر-١} = ٩ : ٥$ ، $ق_{ر} = ق_{ن-٣}^{١٥} = ٥-$

$$\frac{ق_{ر}}{ق_{ر-١}} = \frac{٩}{٥}$$

$$\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٩}{٥}$$

$$٩ر = ٥ن - ٥ر + ٥$$

$$٩ر + ٥ر = ٥ن + ٥$$

$$١٤ر = ٥ن + ٥$$

$$\boxed{٥ن - ١٤ر = -٥} \quad (١)$$

$$ق_{ر} = ق_{ن-٣}^{١٥} = ٥-$$

أي

$$ر = ن - ٣ = ٥-$$

$$ر = ٢ = ٥ \quad (\text{مرفوض})$$

أو

$$ر + ن - ٣ = ١٥ = ٥-$$

$$٤ر = ٢٠$$

$$\boxed{ر = ٥}$$

بالتعويض في (١) عن ر = ٥

$$٥ن - ١٤ \times ٥ = -٥$$

$$٥ن - ٧٠ = -٥$$

$$٥ن = ٦٥$$

$$\boxed{ن = ١٣}$$

(٣٠) (ه) $ق_{ر} = ق_{ر+١}^{٣٠}$

$$ل_{ن-٢}^{٥} \times ٩٠ = ل_{ن}^{٧}$$

$ق_{ر} = ق_{ر+١}^{٣٠}$

$\therefore$ إما $ر = ر + ١$ مرفوضة

أو $ر + ر + ١ = ٣٠$

$٢ر = ٢٩$

$ر = ١٤,٥$ مرفوضة

أو $ر + ر + ١ = ٣٠$

$٢ر = ٢٩$

$ر = ١٤,٥$ مرفوضة

أو $ر + ر + ١ = ٣٠$

$٢ر = ٢٨$

$\boxed{ر = ١٤}$

$$ل_{ن}^{٧} = ٩٠ \times ل_{ن-٢}^{٥}$$

$$\frac{ل_{ن}^{٧}}{ل_{ن-٧}^{٧}} = ٩٠ = \frac{ل_{ن-٢}^{٥}}{ل_{ن-٧}^{٥}}$$

$$ل_{ن}^{٧} = ٩٠ ل_{ن-٢}^{٥}$$

$$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦) = ٩٠ ل_{ن-٧}^{٥}$$

$$٩٠ \times ١٠ = ٩٠٠ = (ن-١)ن$$

$$\boxed{ن = ١٠}$$

$$ق_{٣٠}^{ن} = ق_{٣٠}^{١٠}$$

$$ل_{٧}^{ن} = ٩٠ ل_{٥}^{٨}$$

(٢١) لدينا ٤ نقاط في مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة ، أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل كل منها بين نقطتين؟

(٢٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

(٢٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

(٢٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوي الفريق على ثلاثة أولاد فقط؟

(٢٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل شخص في اللجنتين في ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٢

(٣٦) أ- عدد المثلثات = $ق_{٣}^{٤} = ٤$

ب- عدد المثلثات = $ق_{٣}^{٥} = ١٠$

ج- عدد المثلثات = $ق_{٣}^{٦} = ٢٠$

(٣٧) عدد الأقطار = عدد القطع المستقيمة - عدد الأضلاع

أ- عدد الأقطار = $ق_{٢}^{٦} - ٦ = ١٥ - ٦ = ٩$

ب- عدد الأقطار = $ق_{٢}^{٨} - ٨ = ٢٨ - ٨ = ٢٠$

ج- عدد الأقطار = $ق_{٢}^{١٢} - ١٢ = ٦٦ - ١٢ = ٥٤$

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

ب) كم لجنة تحتوي على امرأة واحدة فقط؟

ج) كم لجنة تحتوي على امرأة واحدة على الأقل؟

عدد الرجال ٩
عدد النساء ٣
اللجنة ٤

أ) عدد الطرق = ${}^{9}C_{4} + {}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3} + {}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{2} + {}^{3}C_{3} \times {}^{9}C_{1}$

$= 126 + 3 \times 84 + 3 \times 36 + 1 \times 9$

$= 126 + 252 + 108 + 9$

$= 495$ طريقة

حل آخر: عدد الطرق $= {}^{12}C_{4} = 495$ طريقة

ب) عدد اللجان التي تتكون من امرأة واحدة $= {}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3}$

$= 3 \times 84 = 252$ لجنة

ج) عدد اللجان التي تتكون من امرأة واحدة على الأقل =

$= {}^{3}C_{1} \times {}^{9}C_{3} + {}^{3}C_{2} \times {}^{9}C_{2} + {}^{3}C_{3} \times {}^{9}C_{1}$

$= 3 \times 84 + 3 \times 36 + 1 \times 9$

$= 369$

حل آخر

عدد اللجان $= {}^{12}C_{4} - {}^{9}C_{4}$

$= 495 - 126 = 369$

حل تمارين ١-١ صفحة ١٠ بكتاب الجبر و الهندسة الفراغية (التباديل و التوافيق)